Équation d'une courbe

Les réponses des exercices sont téléchargeables sur le site
MathEnSeconde.fr

I- Cas général

Avant le cours

Exercice 1

Représenter à main levée sur feuilles à petits carreaux (en choisissant un repère orthonormé dont l'unité est 1cm), l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant la condition imposée. On fera des figures séparées.

a) $y \geq 0$
b) $x \geq 0$ et $y \geq 0$
c) $x \geq 0$ ou $y \geq 0$
d) $x \leq y$
e) $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$
f) $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$

Après la définition

Exercice 2

Sans calculatrice.
« Construire » point par point très soigneusement, sur feuilles à petits carreaux (en choisissant un repère orthonormé dont l'unité est 2cm), la figure dont l'équation est donnée ci-dessous. Vous ferez les figures sur trois feuilles différentes, de façon à pouvoir ensuite les coller dans le cahier d'exercice. Mettez vos noms et prénom sur les feuilles. Votre travail sera ramassé et peut-être noté.
a) $y = x^2$
b) $xy = 1$
c) $x + 2y = 5$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on pose :
$A(1;1)$; $B(1;-1)$
Donner dans chaque cas une équation de la figure proposée (aucune explication n'est ici requise).
a) L'axe des ordonnées.
b) L'axe des abscisses
c) (OA)
d) (OB)
e) (AB)
f) La réunion de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.
g) $(OA) \cup (OB)$

Exercice 4

« Construire » point par point si nécessaire (en choisissant un repère orthonormé dont l'unité est 2cm), la figure d'équation $y = x^3$

Exercice 5

Soit $\mathfrak{F} : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.
Est-ce que $A(2;2) \in \mathfrak{F}$?

Exercice 6

Soit $\mathfrak{F} : x + 5x^3y^2 + y^3 = 2xy^5 + \sqrt{2}$.
$\mathfrak{F}$ rencontre-t-elle l'axe des abscisses ?

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

II- Cas particulier des équations de droites

Avant les théorèmes

Exercice 8

Commencer au brouillon.

Dans un repère donné : $A(1;1)$ et $B(4;3)$

Sans utiliser les théorèmes du cours, déterminer une équation de (AB). La transformer de façon à exprimer y en fonction de x.

Exercice 9

Sans utiliser les théorèmes du cours, déterminer une équation de (AB). La mettre si possible sous la forme $y = ax + b$ (où a et b constantes).

a) $A(0;1)$ et $B(2;2)$

b) $A(-1;2)$ et $B(1;-3)$

c) $A(5;0)$ et $B(0;-3)$

Exercice 10

Dans un repère donné : $A(1;5)$ et $B(-2;-3)$

Sans utiliser les théorèmes du cours, déterminer une équation de (AB). La mettre si possible sous la forme $y = ax + b$ (où a et b constantes).

Après le théorème 1

Exercice 11

Commencer au brouillon.

Dans un repère donné : $A(1;1)$ et $B(4;3)$

Déterminer une équation de (AB) en utilisant le théorème 1 du cours.

Exercice 12

Déterminer dans chaque cas une équation de la droite (AB) en utilisant le théorème du cours sur les équations de droites. Vérifiez chacune de vos réponses (au brouillon).

a) $A(-1;1)$ et $B(2;4)$

b) $A(-2;1)$ et $B(1;-3)$

c) $A(6;0)$ et $B(0;-4)$

Exercice 13

$A(1;4)$ et $B(-2;-2)$

Déterminer une équation de la droite (AB) en utilisant le théorème du cours sur les équations de droites.

Exercice 14

Sont-ce des équations de droite ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite.

$F_1 : y = \dfrac{1-x}{3}$

$F_2 : x = \dfrac{1-y}{3}$

$F_3 : 2x + 3y = 5$

$F_4 : y = x$

$F_5 : y = -x$

$F_6 : y = 2x + \dfrac{y}{2}$

$F_7 : y = 2x + y$

$F_8 : y + 6 = x \times x + 2$

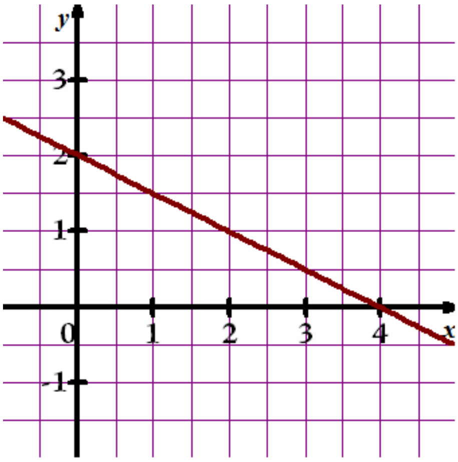
$F_9 : x^2 = y^2$

Après le théorème 2

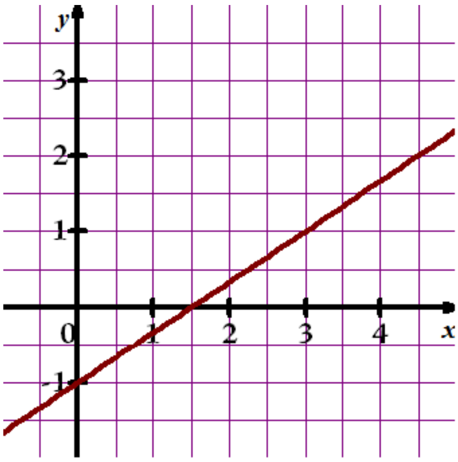
Exercice 15

Déterminer le plus simplement possible les équations des droites représentées ci-dessous. Seule la réponse finale est demandée.

a)



b)



Exercice 16

Commencer au brouillon.

Dans un repère donné : $A(1;1)$ et $B(4;3)$

Déterminer une équation de (AB) en utilisant le théorème 1 du cours sur les équations de droites et la formule concernant le coefficient directeur (théorème 2).

Exercice 17

Déterminer une équation de (AB) en utilisant le théorème 1 du cours sur les équations de droites et la formule concernant le coefficient directeur (théorème 2). Vérifiez chacune de vos réponses (au brouillon).

a) $A(0;1)$ et $B(2;2)$

b) $A(-1;2)$ et $B(1;-3)$

c) $A(5;0)$ et $B(0;-3)$

Exercice 18

$A(-3;0)$ et $B(-1;1)$

Déterminer une équation de la droite (AB) en utilisant le théorème du cours sur les équations de droites et le théorème concernant le coefficient directeur.

Exercice 19

$A(0;-2)$ et $B(2;1)$

Déterminer une équation de la droite (AB) de trois façons différentes.

Exercice 20

Dans un repère qu'on pourra choisir orthonormé, tracer la droite d'équation :

a) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

b) $y=\frac{2}{3}x$

c) $y=-2x+3$

Exercice 21

$A(1;-1)$ et $B(1;-3)$

Sans rien rédiger, donner une équation de (AB).

Caractérisation du parallélisme

Exercice 22

Commencer au brouillon.

$\Delta : 2x+3y=0$ et $A(0;-2)$

Déterminer une équation de d, parallèle à Δ passant par A.

Exercice 23

$\Delta : 2x + y = 3$ et $A(3;0)$

Déterminer une équation de d, parallèle à Δ passant par A.

Intersections

Exercice 24 *A faire au brouillon*

$A(-2;-1)$; $B(3;1)$; $C\left(1;\frac{1}{5}\right)$

a) Déterminer une équation de la droite (AB).

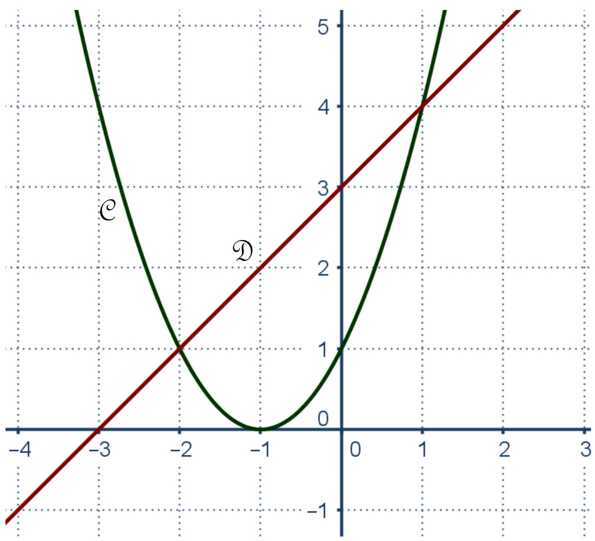
b) Le point C appartient-il à la droite (AB) ?

c) Déterminer l'abscisse du point d'intersection entre (AB) et l'axe des abscisses.

Exercice 25

Commencer au brouillon.

On pose : $\mathcal{C} : y = (x+1)^2$ et $\mathcal{D} : y - 3 = x$.



Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 26

Commencer au brouillon.

On pose : $D : y = -2x + 1$ et $D' : y = 3x - 1$.

Tracer D et D'.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de D'.

Exercice 27

On pose : $D : 2x + y = -1$ et $D' : x = 2y + 1$

Démontrer que D et D' sont des droites, puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de D'.

Exercice 28

Soit Δ la droite d'équation : $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Soit D la droite d'équation : $y = x$

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ avec D.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisse.

Exercice 29

On pose : $D : x + 2y = 3$ et $D' : y = 2x - 1$

Démontrer que D est bien une droite, puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de D'.

Exercice 30

On pose : $A(2;4)$; $B(4;-1)$; $C(0;-3)$; $D(-2;0)$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre les diagonales du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 31

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on donne les équations de trois droites :

$\Delta_1 : y = \frac{5}{3}x + 3$ $\Delta_2 : y = 3x - 1$ $\Delta_3 : y = -2x + 14$

Ces trois droites sont-elles concourantes ?

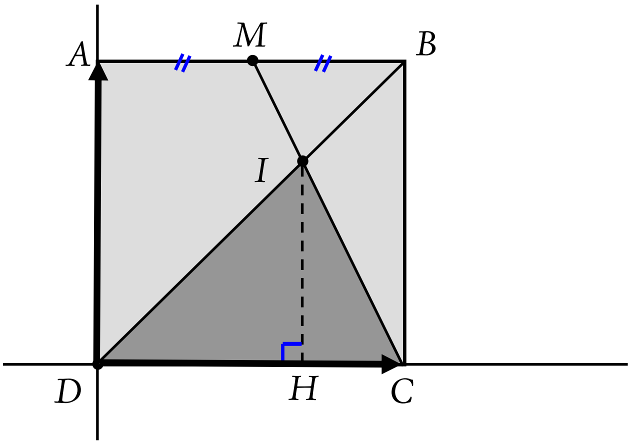
Exercice 32

$\mathscr{E} : x^2 + 3y^2 = 5 \qquad \mathscr{F} : 5xy + 3y^3 = \sqrt{2}$

Le point $A(3;2)$ est-il un point d'intersection de $\mathscr{E}$ et de $\mathscr{F}$?

Exercice 33

Soit *ABCD* un carré. Soit *M* le milieu de [*AB*]. Soit *I* le point d'intersection de [*MC*] et de [*DB*]. On souhaite déterminer quelle est l'aire du triangle *DIC* par rapport à l'aire du carré *ABCD*. Pour cela, on choisit comme unité de longueur **u** le côté du carré. L'unité d'aire sera alors $\mathbf{u}^2$ (c'est-à-dire l'aire du carré). On se placera dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$, qui est orthonormé. On a alors, par exemple : $M\left(\frac{1}{2};1\right)$. Notons *H* le projeté orthogonal de *I* sur (DC).



a) Donner *sans justification* les équations des droites (MC) et (DB).
b) Déterminer les coordonnées de *I*. *(Soigner la rédaction.)*
c) En déduire la longueur *IH*, puis enfin l'aire de *DIC*.

Exercice 34

Commencer au brouillon.

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On pose : $\quad F\left(0;\frac{1}{4}\right)$

$\Delta : y = -\frac{1}{4}$

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points équidistants du point *F* et de la droite Δ.
Soit *D* la droite d'équation $y = 2x + 1$.

a) Déterminer une équation de $\mathscr{P}$. L'écrire sous la forme la plus simple possible.

b) Représenter $\mathscr{P}$ et *D* en prenant pour unité 1 cm.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{P}$ et la droite *D*.

Exercice 35

Dans un repère orthonormé, on pose : $F(2;1)$. Notons *d* l'axe des abscisses. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points équidistants du point *F* et de la droite *d*. Déterminer une <u>équation</u> de $\mathscr{P}$, que l'on simplifiera.

Approfondissements

Exercice 36

Dans un repère orthonormé.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(1;0)$ et de rayon 3 et soit *d* la droite d'équation $y = -2$. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$, puis les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et *d*.

Exercice 37

Soit $k\in\mathbb{R}$.

On pose : $A(-2;0)$ $K(0;k)$

1- Dans cette question, $k = 3$.
Déterminer :
a) Une équation de la droite (AK).
b) Les coordonnées du point d'intersection entre (AK) et la droite d d'équation $y = x$.

2- Déterminer, en fonction de k :
a) L'équation de la droite (AK). (Le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine seront exprimés en fonction de k)
b) Les coordonnées du point d'intersection entre (AK) et la droite d d'équation $y = x$ (et dire pour quelle valeur de k ce point n'existe pas).

Exercice 38

Soit $k\in \mathbb{R}^*$

On pose : $A(0;3)$ $P(k;k)$

Déterminer en fonction de k :
a) L'équation de la droite (AP). (Le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine seront exprimés en fonction de k)
b) Les coordonnées du point d'intersection entre (AP) et l'axe des abscisses (dire pour quelle valeur de k ce point n'existe pas).

Exercice 39

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On note $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y=x^2$

Soit $k\in\mathbb{R}$.

Soit K le point d'abscisse k appartenant à $\mathcal{P}$.

Soit K' le projeté orthogonal de K sur l'axe $(O;\vec{i})$.

Soit I le milieu de $[OK']$.

a) Dans cette question, on suppose que $k = 2$. Déterminer alors une équation de la droite (KI), puis étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (KI). Tracer (KI).

b) Dans cette question, on suppose que $k = 3$.
Déterminer alors une équation de la droite (KI), puis étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (KI).

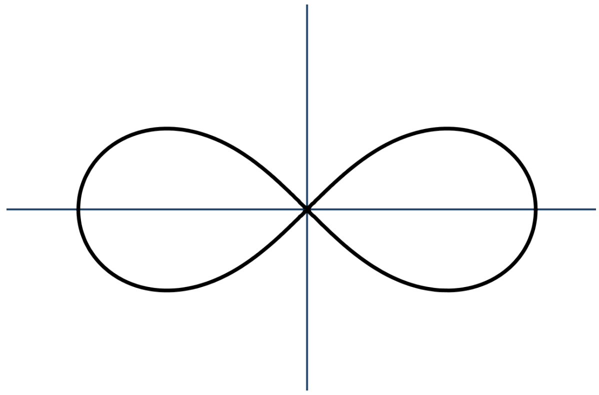
c) Déterminer en fonction de k une équation de la droite (KI), puis étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (KI).

Exercice 40

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on pose : $A(3;2)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice de $[OA]$.
b) En déduire les coordonnées du point de l'axe des ordonnées qui est équidistant de O et de A.

Exercice 41



Soient A et B deux points. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des points dont le produit des distances à A et à B est constant ; et qui passe par le milieu de $[AB]$. $\mathcal{L}$ se nomme une *lemniscate de Bernoulli*.

On choisit un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ de façon que $A(-a;0)$ et $B(a;0)$, où $a\in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que, dans ce repère, $\mathcal{L}$ admet une équation de la forme : $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$